黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@white/190638
への補足

1. $(x,y)=(\sqrt{1-t^2},t)$ のとき点 (x,y) の動く速さは

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

ゆえに $(1,0)$ から $(\sqrt{1-y^2},y)$ への弧度法の意味での角度 $\theta(y)$ は

$$\theta(y)=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

高校での三角函数の導入の仕方によれば、函数 $\theta=\theta(y)$ の逆函数が
$y=\sin\theta$ であり、$\cos\theta=\sqrt{1-y^2}$ である。$d\theta/dy=1/\sqrt{1-y^2}$ なので、

$$\frac{\sin\theta}{d\theta}=\sqrt{1-y^2}=\cos\theta.$$

2017年05月29日 08:03 · Web · 0 · 2 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29
続き

こんな感じで「速さの積分で曲線の長さを表せること」(高校数学IIIの教科書に書いてある)を使えば、弧度法の意味での角度が積分で書けて、三角函数は角度を表す不定積分の逆函数で定義されることがわかります。その後は簡単。

この方針を楕円積分

$$F(y)=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

に適用すればJacobiの楕円函数 $\operatorname{sn} z$ が得られます。

速さの積分が進んだ距離になることは微積分を習ったあらゆる人が知っておくべき基本知識であり、そこにすべてを帰着させることができるわけで、自然でかつ単純な話です。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

を経由するのはひどい遠回り。簡単で自明な話を、こじらせて、拡張性が低い方法で、より難しく、ダサくやっているだけ。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

面積比較もクリアな計算によって可能。

以下 $0\leqq t\leqq y<1, \theta=\int_0^y dt/\sqrt{1-t^2}$ とする。角度 θ で半径1の扇型の面積は

$$S=\int_0^y\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}.$$

これを部分積分すれば $S=\theta/2$ が得られます。その扇型と原点, $(1,0)$, $(\sqrt{1-y^2},y)$ を頂点とする三角形の面積 $y/2$ の比較は $1/\sqrt{1-t^2}\geqq 1$ より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\&\geqq\frac{1}{2}\int_0^y dt=\frac{1}{2}y.\end{aligned}$$

原点, $(1,0)$, $(1,y/\sqrt{1-y^2})$ を頂点とする三角形の面積との比較は $1/\sqrt{1-t^2}\leqq 1/\sqrt{1-y^2}$ から得られます。

よく見れば無駄に遠回りしているだけ。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

三角函数論は

・速さの積分で曲線の長さが得られること
・逆函数の導函数
・部分積分

などなどの微積分の基本が縦横に使われてかつ、楕円積分論=楕円函数論への拡張も容易な気持ちの良い話。

いつも強調していることは、函数の定義で積分の使用を避けてはいけないこと。

積分はとても扱い易い演算なので、積分を使えたら、ラッキーだと思うべき。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

$$\theta=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

の逆函数は $\sin\theta$ の一般化であるJacobiの楕円函数

$$y = \operatorname{sn}\theta$$

です。さらに $\cos\theta$ の一般化を

$$x = \operatorname{cd}\theta = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-k^2y^2}}$$

と定めると、これらは単位円周を一般化した曲線

$$x^2 + y^2 = 1 + k^2x^2y^2$$

をパラメトライズします。

この曲線は楕円曲線暗号で使われているEdwards曲線です。

楕円曲線をEdwards曲線で表示しておくと、楕円曲線の群構造がシンプルに書けます(本質的にJacobiの楕円函数の加法定理)。

その事実が暗号技術と相性が良いので実際に使われるようになりました。ただし有限体上で使うのですが。

こういう話と三角函数論の距離は非常に近いです。しかも滑らかに繋がっている。

高校でEdwards曲線について教えて良いと思う。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

Edwards曲線の話は何度もしている。これ、とってもきれいで初等的にもやれる話なので数学教育の世界に広まるとよいと思う。

mathtod.online/@genkuroki/2991…
mathtod.online/@genkuroki/3516…
mathtod.online/@genkuroki/6181…
mathtod.online/@genkuroki/6251…

「循環論法になっている」というような後ろ向きのデマはきちんと排除して、きれいでシンプルで拡張性の高い定式化を普及させ、実際に拡張性に富んでいることを示し、数学的にきれいなformulationが優れた技術の源泉になっているという事実について、きちんと若い人達に伝えて行くことが、大人側の責任だと思う。大人達が社会的に協力し合わないと実現できない。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

mathtod.online/@genkuroki/1917…
訂正。分子の d が抜けていた。正しくは

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \sqrt{1-y^2} = \cos\theta.$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

一般に「論理的に厳密な定式化」を中途半端な段階で徹底しようとするのは悪手になることが多いと思う。

「論理的に厳密な定式化」は結構重い処理が必要になるので、そのために必要なリソースを減らすための「数学的に自然できれいな定式化」がものすごく重要。

一方、「数学的に自然できれいな定式化」というかっこよさそうな道にいきなり走り込もうとすることも自殺行為なのでやめた方が良いと思う。

具体的で複雑な数学の風景に無知なままでは、結果的に偉い人達が見つけたきれいな定式化に忠実に従うだけで終わってしまうことになるだろう。

それだとあんまり理解したとは言えない。

偉人の共鳴装置になるのはつまらない。

もちろん、過去の偉人達が何をやったかを学ばずに勝手に複雑な計算するだけでもダメ。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

mathtod.online/@moguest/192247
について「補足」

実際には、円周率の定義を単位円周の長さの半分と定義したり、弧度法の意味での角度を単位円周の弧の長さで定義することは、論理的に厳密な議論をし易くて、拡張性に富んでいる数学的に極めて素性のよい定式化です。

数学にはよく曲線上の 1-form ω の積分 $\int_\gamma \omega$ が出て来ます。これは数学的に素性の良い式です。

すでに詳しく解説したように、角度 θ は「速さの積分」によって

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-y^2}}$$

と書けます。だから、円周率の単位円弧の長さとしての定義は

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

です。もちろん無数に別の表示がある。これらはとても素性の良い式です。

この手の素性の良い式を使わないから、拡張性に乏しくて、論理的厳密性も怪しい議論になってしまうのです。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

私がググって見つけた三角函数に関する論理的厳密性にこだわった議論で『病的』だと感じられるものには以下のものがあります。

・曲線の長さを使用することを避けようとする。(避けない方が楽)

・曲線の長さは折れ線近似で定義しなければいけないと誤解している。(速さの積分で簡単に定義できます。高校数学IIIの教科書にも書いてある。)

・論理的に厳密な議論にするには三角函数をべき級数で天下りに定義するべきだと信じていたりする。(積分を避けるからそういう天下り的方法になってしまう。楕円積分から楕円函数に至る道も閉ざされる。)

「高校数学における三角函数の微積分は循環論法」というデマのダメージは結構大きいように見えます。

そのデマについては大学の数学の先生がおかしなことを言っている場合が目立つので大学の数学の先生(の一部)が悪いのだと思う。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29
mathtod.online/@genkuroki/1923…

誤植発見。正しくは

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

三角函数の定義より、これの逆函数が自明に $y = \sin\theta$ なので、$\sin\theta$ の導函数は逆函数の微分法によって自明にwell-definedかつ容易に計算される。

$$\begin{aligned}\frac{d\sin\theta}{d\theta} &= \frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{d\theta/dy} \\ &= \sqrt{1-y^2} = \cos\theta.\end{aligned}$$

これの特別な場合として

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

が証明される。わざわざこれを経由して、三角函数の微分を求めるのはものすごく遠回り。

こういう簡単な話をどうしてこんなにこじらせたのか不思議。

多分、大昔の誰かの解説がコピペで「伝言ゲーム」状態になって現在に伝わっているのだと思う。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29
以上の話の最重要ポイントは、三角函数の定義より、

$$\theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

の逆函数が自明に $y = \sin\theta$ であること。

この事実を $t = \sin u$ のような置換積分をしなければ理解できない人達は以上の話をまったく理解していない。

$(x,y) = (\sqrt{1-t^2}, t)$ のとき、点 (x,y) の動く速さが

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

なので、これを積分すれば角度が得られる。角度に y 座標を対応させる函数が $\sin\theta$ だったので、上のような不定積分で定義される函数の逆函数が $\sin\theta$ の(高校の教科書にある)定義(の正確な表現)だということになります。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

ダメ押し

平面上の点 A と B を結ぶ最短経路が線分になることについても、何か非常に難しいことであるかのように思っている人もいるような感じ。

ベクトル $v_1, \dots, v_n$ についての三角不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^n \|v_i\|$$

の極限を取ることによって(等号付きの不等式は極限で保たれる)、ベクトル値函数 $v(t)$ に関する不等式

$$\left\|\int_a^b v(t)\,dt\right\| \leqq \int_a^b \|v(t)\|\,dt$$

が得られます。これを $x(a) = A, x(b) = B$ を満たす点の運動 $x(t)$ に対する速度 $v(t) = dx(t)/dt$ に適用すれば

$$\begin{aligned}&(A\text{ と }B\text{ の距離})\\ &\leqq (A\text{と}B\text{を結ぶ曲線の長さ})\end{aligned}$$

が得られます。距離や速さはノルム $\|\quad\|$ で測ったもの。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 29

曲線の長さを積分で定義しておけば、積分が和の極限であることと通常の三角不等式から、「積分版の三角不等式」が得られます。その「積分版の三角不等式」が「最短経路は線分になること」を含んでいます。何も難しいところがない。

最短経路が線分になることを非常に難しいことであるかのように語るのはとてもまずいと思う。

mathtod.online powered by Mastodon